1) E^2 de $\{x_1, x_2\}$ Öklid koordinat sistemi ve

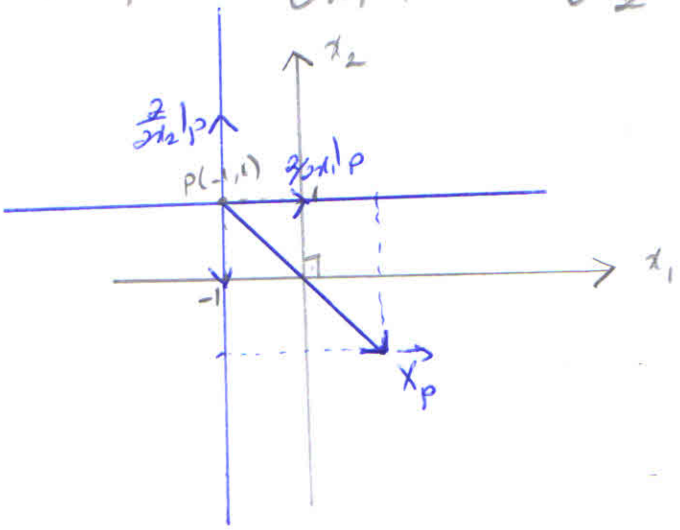
$$X = (x_1^2 + x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$ vektör alanı verilsin.

$P = (-1,1) \in \mathbb{R}^2$ için $\vec{X}_p$ tanjant vektörünü bulunuz. Şeklini çiziniz.

$$\vec{X}_p = (x_1^2(p) + x_2(p))\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p - 2x_2(p)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$$

$$\Rightarrow \vec{X}_p = (p_1^2 + p_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p - 2p_2\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$$

$$\Rightarrow \vec{X}_p = 2\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p - 2\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$$



2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in C(E^n, \mathbb{R})$, $\forall \vec{V}_p \in T_{E^n}(p)$ için

$$\vec{V}_p[af + bg] = a\vec{V}_p[f] + b\vec{V}_p[g]$$

olduğunu gösteriniz.

$$\vec{V}_p = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \text{ olsun.}$$

$$\vec{V}_p[af + bg] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial (af + bg)}{\partial x_i}\Big|_p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \left(a\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p + b\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_p \right)$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p + b\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_p$$

$$= a\vec{V}_p[f] + b\vec{V}_p[g]$$

3) $\alpha(t) = (e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$ eğrisini yay-parametresi ile ifade ediniz.

$$\alpha'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t,\ e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{3}\,e^t \neq 1 \quad (\forall t \in I)$$

Eğrinin $\alpha(0)$ ile $\alpha(t)$ arasındaki yayının uzunluğu,

$$s = \int_0^t \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_0^t \sqrt{3}\,e^t\,dt$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{3}\,e^t \Rightarrow t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$$

Eğrinin $(I\alpha)$ dan başka bir koordinat komşuluğu $(\bar{J},\beta)$ olsun. $h = \alpha^{-1}\circ\beta : \bar{J} \to I$, $h(s) = t$ parametre değişim fonksiyonu olmak üzere

$$\beta(s) = \alpha(h(s))$$
$$= \alpha(t)$$
$$= \alpha\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta(s) = e^{\ln(s/\sqrt{3})}\left(\cos\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right),\ \sin\left(\ln\frac{s}{\sqrt{3}}\right),\ 1\right)} \text{ olur.}$$

4) $\alpha(s) = \left(\frac{4}{5}\cos s,\ 1-\sin s,\ -\frac{3}{5}\cos s\right)$ eğrisinin eğriliklerini bularak helis eğrisi olup olmadığını araştırınız.

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{4}{5}\sin s,\ -\cos s,\ \frac{3}{5}\sin s\right),\quad \|\alpha'(s)\| = 1$$

$$\Rightarrow T(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{4}{5}\sin s,\ -\cos s,\ \frac{3}{5}\sin s\right)$$

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{4}{5}\cos s,\ \sin s,\ \frac{3}{5}\cos s\right),\quad \|\alpha''(s)\| = 1$$

$$\Rightarrow N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \left(-\frac{4}{5}\cos s,\ \sin s,\ \frac{3}{5}\cos s\right)$$

$$B(s) = T(s)\wedge N(s) = \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\frac{4}{5}\sin s & -\cos s & \frac{3}{5}\sin s \\ -\frac{4}{5}\cos s & \sin s & \frac{3}{5}\cos s \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{5},\ 0,\ -\frac{4}{5}\right)$$

$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$, $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$

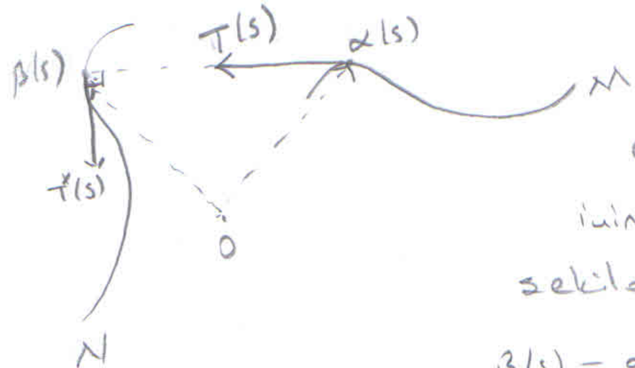
$$T'(s) = \left(-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, \frac{3}{5}\cos s\right)$$

$$N'(s) = \left(\frac{4}{5}\sin s, \cos s, -\frac{3}{5}\sin s\right)$$

$\Rightarrow \boxed{\kappa(s) = 1, \ \tau(s) = 0}$ olur.

$\forall s$ için $\boxed{\dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)} = 0 = \text{sabit}}$ olup eğri helis eğrisidir.

5) $(M,N) \subset E^3$ eğrileri (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verilsin. (M,N) invalüt – evolüt eğri çifti ise $\forall s \in I$ için $d(\alpha(s), \beta(s)) = |c - s|$, $c =$ sabit dir. Gösteriniz.



α nın yay parametresi s, β nın s^* olsun. (M,N) invalüt evolüt eğri çifti olduğundan $\forall s \in I$ için $\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$ dır. Ayrıca şekilden,

$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda T(s)$ yazılabilir.

$$\Rightarrow \frac{d\beta}{ds} = \underbrace{\frac{d\alpha}{ds}}_{T} + \frac{d\lambda}{ds} T + \lambda \underbrace{\frac{dT}{ds}}_{\kappa N}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d\beta}{ds^*}}_{T^*} \frac{ds^*}{ds} = \left(1 + \frac{d\lambda}{ds}\right) T + \lambda \kappa N$$

$$\langle T^*, T \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle T^* \frac{ds^*}{ds}, T \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{d\lambda}{ds} = 0 \Rightarrow \lambda = -s + c$$

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = \|\overrightarrow{\alpha(s)\beta(s)}\| = \|\vec{\beta}(s) - \vec{\alpha}(s)\| = \|\lambda T(s)\| = |\lambda| = |-s + c|$$

olur.